Solution to Final Exam 1403-1

■ مسئله اول: (۲۰ نمره) نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{E}(\rho) = \lambda\rho^T + (1-\lambda)\frac{I}{d}Tr(\rho) \tag{۱}$$

که در آن ρ^T به معنای ترانهاده ρ در یک پایه معین است. محدوده ای از پارامتر λ را پیدا کنید که در آن، نگاشت فوق یک کانال (یک نگاشت کاملا مثبت) را تعریف کند.

یک نگاشت کاملاً مثبت اگر و فقط اگر ماتریس چوی آن مثبت باشد. بنابراین ماتریس چوی را تشکیل می‌دهیم و ویژه مقدارهای آن را بدست می‌آوریم.

$$C_{\mathcal{E}} = d(I\otimes\mathcal{E})(|\varphi^+\rangle\langle\varphi^+|) =$$

$$= (I\otimes\mathcal{E})|ii\rangle\langle jj| = |i\rangle\langle j|\otimes\mathcal{E}(|i\rangle\langle j|) =$$

$$= |i\rangle\langle j|\otimes\left\{\lambda|j\rangle\langle i| + (1-\lambda)\frac{1}{d}\sum_k |k\rangle\langle k|\,\delta_{ij}\right\} = \lambda\sum_{i,j}|ij\rangle\langle ji| + \frac{1-\lambda}{d}I\otimes I$$

$$\longrightarrow C_{\mathcal{E}} = \lambda P + \frac{1-\lambda}{d}I$$

بدست آوردن مقادیر ویژه P : ⟵ بنابر تعریف ⟵ $P|ij\rangle = |ji\rangle$

$$\longrightarrow \begin{cases} P|\varphi^+\rangle = |\varphi^+\rangle & \text{where } |\varphi^+\rangle = |ij\rangle + |ji\rangle \\ P|\varphi^-\rangle = -|\varphi^-\rangle & \text{and } |\varphi^-\rangle = |ij\rangle - |ji\rangle \end{cases}$$

$$\text{Number of } |\varphi^+\rangle = \frac{d(d+1)}{2} \qquad \text{Number of } |\varphi^-\rangle = \frac{d(d-1)}{2}$$

ویژه مقادیر C_ε $= \left\{ \lambda + \frac{1-\lambda}{d} \quad \# \; \frac{d(d+1)}{2} \right\}$

$\cup \left\{ -\lambda + \frac{1-\lambda}{d} \quad \# \; \frac{d(d-1)}{2} \right\}.$

ویژه مقادیر C_ε مثبت هستند حتماً، درنتیجه:

$0 \leq \lambda + \frac{1-\lambda}{d}$ و $0 \leq -\lambda + \frac{1-\lambda}{d} \longrightarrow$ پس از ساده کردن

$$\boxed{\frac{-1}{d-1} \leq \lambda \leq \frac{1}{d+1}}$$

■ مسئله دوم: (۳۰ نمره) آلیس یکی از دو حالت بهنجارِ $|\phi\rangle = \sqrt{a}|0\rangle + \sqrt{b}|1\rangle$ یا $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ را با احتمال مساوی ولی برای n بار به باب می فرستد. باب روی این حالت ها در پایه محاسباتی اندازه گیری انجام داده و k بار نتیجه 0 و $n-k$ بار نتیجه 1 بدست می آورد.

الف: از نظر باب احتمال این که آلیس حالت $|\phi\rangle$ را فرستاده باشد چقدر است و احتمال اینکه حالت $|+\rangle$ را فرستاده باشد چقدر؟

ب_ این احتمالات را به ترتیب با P_ϕ و P_+ نشان دهید. حد این احتمالات را وقتی که $k=0$ است و وقتی که $k=n$ است، بدست آورید و استدلال کنید که این نتایج معقول هستند یا نه؟

از رابطه احتمالات شرطی داریم:

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)\,P(x)}{P(y)}$$

$$= \frac{P(y|x)\,P(x)}{\sum_x P(y|x)\,P(x)}$$

وقتی که $\sum p(x)$ ساده است $\leftarrow$

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)}{\sum_x P(y|x)}.$$

با توجه به فرم حالت‌های $|+\rangle, |\varphi\rangle$ $\leftarrow$

$$P(0^k\, 1^{n-k} \mid |\varphi\rangle^n) = a^k b^{n-k}$$

$$P(0^k\, 1^{n-k} \mid |+\rangle^n) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

$$P(0^k, 1^{n-k} \mid |\varphi\rangle^{\otimes n}) = a^k b^{n-k}$$

$$P(0^k, 1^{n-k} \mid |+\rangle^{\otimes n}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n$$

$$\longrightarrow \quad P_\varphi = P(|\varphi\rangle^{\otimes n} \mid 0^k\, 1^{n-k}) = \frac{a^k b^{n-k}}{a^k b^{n-k} + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$\longrightarrow \quad P_+ = P(|+\rangle^n \mid 0^k\, 1^{n-k}) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{a^k b^{n-k} + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

اگر $k=0$ $\leftarrow$

$$\begin{cases} P_\varphi = \dfrac{b^n}{b^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{1}{2b}\right)^n} \\[2ex] P_+ = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{b^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{\left(\frac{1}{2b}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2b}\right)^n} \end{cases}$$

if $b = \frac{2}{3} \longrightarrow \quad P_{\varphi} = \dfrac{1}{1+(\frac{1}{3})^n} \quad , \quad P_+ = \dfrac{1}{1+3^n}$

در حد $n \to \infty$ ، داریم:

$$\begin{cases} P_{\varphi} = 1 \\ P_+ = 0 \end{cases}$$

این نتیجه معقول است، زیرا وقتی که $b = \frac{2}{3}$ است، اندازه‌گیری $|\varphi\rangle$، با احتمال بیشتری 1 تولید می‌کند و با احتمال کمتری 0 تولید می‌کند. بنابراین در حد ∞، اگر هیچ صفری تولید نشده، حتماً حالت ارسال شده $|\varphi\rangle$ بوده و نه $|+\rangle$ که هم صفر و هم 1 را با احتمال مساوی تولید می‌کند.

مسئله سوم: (۳۰ نمره) حالت n تایی GHZ را در نظر بگیرید:

$$|GHZ_n\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\cdots 0\rangle + |111\cdots 1\rangle\right). \qquad (۲)$$

الف: نشان دهید که این حالت ویژه بردار عملگرِ زیراست و ویژه مقدارآن را بدست آورید:

$$A := (\sigma_x + i\sigma_y)^{\otimes n} + (\sigma_x - i\sigma_y)^{\otimes n}. \qquad (۳)$$

می دانیم که مقدار مشاهده پذیری که اندازه گیری σ_x مشخص می کند برابر با ± 1 است. این مقدار را با x نشان می دهیم. (متشابهاً برای σ_y.) حال اگر مقادیر x و y از قبل واقعا وجود داشته باشند و ما فقط با آزمایش مقدار آنها را آشکار می کنیم، اندازه (یا قدر مطلقِ) مشاهده پذیرهای $(x+iy)^{\otimes n}$ و $(x-iy)^{\otimes n}$ چقدراست. با توجه به این مقدارها، مشاهده پذیر A یک مقدار ماکزیمم خواهد داشت. این مقدار ماکزیمم را بدست آورید. نتیجه خود را با آنچه که در قسمت ب بدست آوردید مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می گیرید؟

گردانی که :

$$\sigma_x|0\rangle = |1\rangle \quad , \quad \sigma_x|1\rangle = |0\rangle$$

$$\sigma_y|0\rangle = i|1\rangle \quad , \quad \sigma_y|1\rangle = -i|0\rangle$$

$$\rightarrow \quad (\sigma_x + i\sigma_y)|0\rangle = 0 \quad , \quad (\sigma_x + i\sigma_y)|1\rangle = 2|0\rangle$$

$$\rightarrow \quad (\sigma_x - i\sigma_y)|0\rangle = 2|1\rangle \quad , \quad (\sigma_x - i\sigma_y)|1\rangle = 0$$

$$A|GHZ\rangle = (\sigma_x + i\sigma_y)^{\otimes n}|GHZ\rangle + (\sigma_x - i\sigma_y)^{n}|GHZ\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ 2^n |0^{\otimes n}\rangle + 2^n |1^{\otimes n}\rangle \right\} = 2^n |GHZ\rangle$$

اگر تمامی x و y را به شکل وجود داشته باشند داریم :

$$A = (x + iy)^n + (x - iy)^n$$

$$\rightarrow |A| \leq |(x+iy)^n| + |(x-iy)^n|$$

$$= |x+iy|^n + |x-iy|^n \leq \sqrt{2}^n + \sqrt{2}^n = 2\sqrt{2}^n$$

بنابراین از آنجا که $\text{Max } A = 2\sqrt{2}^{\,n}$ که بسیار بزرگ‌تر از 2^n است،

نتیجه می‌گیریم که مقادیر x و y دلخواه نیستند و از قبل وجود ندارند.

$$(X+iY)|0\rangle = 2|1\rangle \qquad (X+iY)|1\rangle = 0$$

$$(X-iY)|0\rangle = 0 \qquad (X-iY)|1\rangle = 2|0\rangle$$

$$\rightarrow \quad (X+iY)^{\otimes n}|GHZ\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\, 2^n\, |0^n\rangle\right) = 2^n \frac{1}{\sqrt{2}}|1^n\rangle \rightarrow$$

$$(X-iY)^n|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\, 2^n\, |1^n\rangle = 2^n \frac{1}{\sqrt{2}}|0^n\rangle$$

$$A|GHZ\rangle = 2^n|GHZ\rangle$$

$$|(x+iy)^{\otimes n}| = \sqrt{2}^n \qquad |(x-iy)^{\otimes n}| = \sqrt{2}^n$$

$$\rightarrow |A| = 2\sqrt{2}^n$$

$|A| \leq |(n-1)^n| + 1 \qquad |` \leq 2(\sqrt{2})^n$

■ مسئله چهارم: (۳۰ نمره) در آزمایشگاه آلیس مشاهده پذیرهای $A_1,\ A_3, \cdots A_{2n-1}$ و باب مشاهده پذیرهای $B_2,\ B_4, \cdots B_{2n}$ را اندازه می گیرند. اندازه مشاهده پذیرهای A_i و B_j را با a_i و b_j نشان می دهیم. این مقادیر نیز ± 1 هستند.

الف: ثابت کنید که همواره نامساوی زیر برقراراست

$$|a_1 b_2 + b_2 a_3 + a_3 b_4 + b_4 a_5 + \cdots a_{2n-1} b_{2n} - b_{2n} a_1| \leq 2n-2, \tag{۳}$$

و از آن نتیجه بگیرید که متوسط این مقادیر همواره در رابطه زیر صدق می کند:

$$|\langle a_1 b_2 + b_2 a_3 + a_3 b_4 + b_4 a_5 + \cdots a_{2n-1} b_{2n} - b_{2n} a_1 |\rangle \leq 2n-2. \tag{۴}$$

ب: حال یک حالت درهم تنیده مثل

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z+, z-\rangle - |z-, z+\rangle) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle - |1,0\rangle)$$

را در نظر بگیرید. مشاهده پذیرهای A_i و B_i را به شکل زیر تعریف کنید:

$$A_i := \mathbf{a}_i \cdot \vec{\sigma}_A, \qquad B_i := \mathbf{b}_i \cdot \vec{\sigma}_B. \tag{۵}$$

یعنی اینکه اندازه گیری A_i به معنی اندازه گیری اسپین ذره آلیس در راستای $\mathbf{a}_i$ و اندازه گیری B_i اندازه گیری اسپین ذره باب در راستای $\mathbf{b}_i$ است. فرض کنید که بردارهای $\mathbf{a}_1$، $\mathbf{b}_2$ ، $\mathbf{a}_3$ ، $\mathbf{b}_4$ تا $\mathbf{b}_{2n}$ به طور یکنواخت چیده شده باشند و فاصله هر دو بردار متوالی برابر با θ باشد. مقداری را که مکانیک کوانتومی برای متوسط

$$|\langle\psi| A_1 B_2 + B_2 A_3 + A_3 B_4 + B_4 A_5 + \cdots A_{2n-1} B_{2n} - B_{2n} A_1 |\psi\rangle| \tag{۶}$$

پیش بینی می کند چقدراست؟ به ازای چه مقداری از θ این مقدار ماکزیمم می شود. این مقدار چقدر از مقداری که توسط نامساوی تعمیم یافته‌ی $CHSH$ یعنی رابطه 4 بدست آمده است بیشتر است؟